Unité2
2-1) Ensemble des zéros d'une fonction polynôme

Si f : R $\rightarrow$ R est une fonction polynôme en x , alors l'ensemble des valeurs de x qui rendent $f(x)=0$ est appelé l'ensemble des zéros de la fonction f . Cet ensemble est noté $Z(f)$.

Donc , $Z(f)$ est l'ensemble solution de l'équation $f(x)=0$.

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est toujours R .

Exemple 1 :

Trouve $Z(f)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=2x-4$
2) $f(x)=x^2+4$
3) $f(x)=x^6-32x$
4) $f(x)=x^2-2x+1$

1) $2x-4=0$ $\quad 2x=4$ $\quad x=2$ $\quad \therefore\ Z(f)=\{2\}$

2) $x^2+4=0$ (Impossible) $\quad \therefore\ Z(f)=\phi$

3) $x^6-32x=0$ $\quad x\left(x^5-32\right)=0$

$x=0\ ou\ x^5-32=0$

$x^5=32=2^5$ $\quad \therefore\ Z(f)=\{0\ ,\ 2\}$

4) $x^2-2x+1=0$ $\quad (x-1)^2=0$ $\quad x=1$ $\quad \therefore\ Z(f)=\{1\}$

Exercices 2-1 : Le livre P.20

[1] Choisis la bonne réponse :

1) a 2) a 3) d 4) a 5) d

[2] 1) a) $Z(f)=\{1,2\}$

b) $Z(f)=\{0,2\}$

c) $Z(f)=\{\pm 4\}$

d) $Z(f)=\left\{\pm\frac{5}{3}\right\}$

e) $Z(f)=\{0,\pm 3\}$

f) $Z(f)=\{0,\pm 2\}$

g) $Z(f)=\{5\}$

h) $Z(f)=\{-2\}$

i) $Z(f)=\{0,-3\}$

j) $Z(f)=\left\{\frac{4}{3},\frac{-3}{2}\right\}$

k) $Z(f)=\{0,-5,3\}$

l) $Z(f)=\left\{0,\frac{3}{2},-2\right\}$

m) $Z(f)=\{7,-2\}$

n) $Z(f)=\{-2,1\}$

o) $x^3+x^2-2x-8=0$

$$(x^3-8)+(x^2-2x)=0$$
$$(x-2)(x^2+2x+4)+x(x-2)=0$$
$$(x-2)(x^2+2x+4+x)=0$$
$$(x-2)(x^2+3x+4)=0$$
$$\therefore\ Z(f)=\{2\}$$

p) $x^3-3x^2-4x+12=0$

$$x^2(x-3)-4(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2-4)=0$$
$$(x-3)(x-2)(x+2)=0$$
$$\therefore\ Z(f)=\{3,\pm 2\}$$

2) $f(5)=5^3-2\times 5^2-75=0$

Donc, 5 est l'un des zéros de la fonction .

3) $f(3)=3^2+a=0$ $\therefore\ a=-9$

4) $f(3)=a\times 3^2+b\times 3+15=0$ $\therefore\ 9a+3b+15=0 \xrightarrow{\div 3} \therefore\ 3a+b+5=0$

$f(5)=a\times 5^2+b\times 5+15=0$ $\therefore\ 25a+5b+15=0 \xrightarrow{\div 5} \therefore\ 5a+b+3=0$

$\therefore\ a=1 \ et\ b=-8$

======================================

2-2) Fonction rationnelle

Si f et g sont deux fonctions polynômes et si $Z(g)$ est l'ensemble des zéros de g , alors la fonction h telle que h : R - $Z(g)$ $\rightarrow$ R , $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ est appelée une fonction rationnelle.
Donc , son domaine de définition = R - l'ensemble des zéros du dénominateur .

Exemple 1 :

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions rationnelles suivantes :

1) $f(x)=\frac{x+3}{4}$
2) $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2-16}$
3) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-x}$

1) $E.D=R$
2) $x^2-16=0$ $\quad x=\pm4$ $\quad \therefore\ E.D=R-\{4,-4\}$
3) $x^2-x=0$ $\quad x(x-1)=0$
$\quad x=0\ ou\ x=1$ $\quad \therefore\ E.D=R-\{0,1\}$

Exemple 2 :

Si l'ensemble de définition de la fonction $g(x)=\frac{x-1}{x^2-ax+9}$ est $R-\{3\}$. Trouve la valeur de a .

$\{3\}$ est l'ensemble des zéros du dénominateur

$3^2-a\times3+9=0$ $\quad \therefore\ a=6$

Si g_1 et g_2 sont deux fonctions rationnelles . Le domaine de définition de g_1 est $R - Z_1$ et le domaine de définition de g_2 est $R - Z_2$, alors le domaine de définition commun = $R - \{Z_1 \cup Z_2\}$

Exemple 3 :

Détermine l'ensemble de définition commun dans chacun des cas suivants :

1) $n_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $n_2(x) = \dfrac{2}{x+1}$
2) $n_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, $n_2(x) = \dfrac{3x}{x^2-x}$, $n_3(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-2}$

1) $d_1 = R - \{0\}$ $d_2 = R - \{-1\}$

Domaine commun $= d_1 \cap d_2 = R - \{0,-1\}$

2) $d_1 = R - \{2,3\}$ $d_2 = R - \{0,1\}$ $d_3 = R - \{-2,1\}$

Domaine commun $= R - \{-2,1,0,3\}$

Remarque :

L'ensemble des zéros d'une fonction rationnelle

= zéros du numérateur - zéros du dénominateur

Exemple 4 :

Détermine l'ensemble des zéros :

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$

1) $x^2 + 3x = 0$ $x^2 - 9 = 0$

$x(x+3) = 0$ $x^2 = 9$

$x = 0$ *ou* $x = -3$ $x = \pm 3$

$Z(f) = \{0,-3\} - \{3,-3\} = \{0\}$

2) $x^2+3x-4=0$ $x^2+x-2=0$

$(x+4)(x-1)=0$ $(x+2)(x-1)=0$

$x=-4 \text{ ou } x=1$ $x=-2 \text{ ou } x=1$

$$Z(f)=\{-4,1\}-\{-2,1\}=\{-4\}$$

Exercices 2-2 : Le livre P.23

1) Domaine commun $=R-\{0\}$
2) Domaine commun $=R-\{0\}$
3) Domaine commun $=R-\{-5,7\}$
4) Domaine commun $=R-\{4,0\}$
5) Domaine commun $=R-\{2,-2\}$
6) Domaine commun $=R-\{0,2\}$
7) Domaine commun $=R-\{1,-1\}$
8) Domaine commun $=R-\{2,-2\}$
9) Domaine commun $=R-\{-4,3\}$
10) Domaine commun $=R-\{0,3,-3\}$
11) Domaine commun $=R-\{3,-3\}$
12) Domaine commun $=R-\{-1,0,1,3\}$
13) Domaine commun $=R-\{3,2,-3,-2,1\}$

======================================